KOMBINATORIKA
(4.ročník I.pololetí DE, 2.ročník I.pololetí NS)

Kombinatorika je část matematiky, zabývající se uspořádáváním daných prvků podle jistých pravidel do určitých skupin a výpočtem množství těchto skupin.

Tato část matematiky se začala rozvíjet zejména v 17. a 18. století a souvisela s určováním výhry v různých hazardních hrách.

Současná kombinatorika řeší pomáhá řešit řadu problémů např.sestavování jízdních řádů, rozvrhů, plánů, optimalizace technologických procesů, ekonomická řešení apod.

Podle typu k-tic hovoříme o **VARIACÍCH, PERMUTACÍCH** a **KOMBINACÍCH**. Ty dále dělíme podle toho, zda se prvky mohou nebo nemohou v k-ticích opakovat, na **VARIACE, PERMUTACE a KOMBINACE s opakováním nebo bez opakování**. Převážná část úloh, které budeme v hodinách řešit (z časových důvodů), je bez opakování. Definice uvedené dále jsou taktéž pro VARIACE, PERMUTACE a KOMBINACE bez opakování.

Definice a výpočty pro VARIACE, PERMUTACE a KOMBINACE s opakováním naleznete v jakékoliv středoškolské učebnici nebo na níže uvedených www stránkách.

Chcete-li si kombinatoriku více procvičit nebo lépe pochopit, doporučuji tyto stránky:

http://carolina.mff.cuni.cz/~jana/kombinatorika/

Základní pravidla kombinatoriky

Tato pravidla nám pomohou velmi rychle vyřešit řadu základních kombinatorických úloh. Definice jsou na první pohled složité, ale po bližším prozkoumání byste měli zjistit, že tomu tak není.

Kombinatorické pravidlo součtu:

Jsou-li $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ konečné množiny s $p_1, p_2, \ldots. p_n$ prvky a jsou-li každé dvě disjunktní, pak množina $A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n$ má $p_{1+}\ p_{2+} \ldots.+p_n$ prvků.

Definici si vysvětlíme a potom ukážeme na konkrétním příkladu.

Jsou-li $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ konečné množiny-------konečná množina je množina obsahující konečný počet prvků.

konečné množiny s $p_1, p_2, \ldots. p_n$ prvky----------A_1 má p_1 prvků, A_2 má p_2 prvků atd.

a jsou-li každé dvě disjunktní---------------------disjunktní znamená, že průnik těchto dvou množin je prázdná množina. Tyto množiny tedy nemají společné žádné prvky.

pak množina $A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n$ **-----------------**to je zápis pro sjednocení množin

má $p_{1+}\ p_{2+} \ldots.+p_n$ prvků ---------------------------množina vzniklá sjednocením všech množin má počet prvků p1+ p2+ ….+pn

Příklad:

Kolik přirozených čísel menších než 200 končí trojkou?

Příklad se dá vyřešit samozřejmě i jinak, já však na něm chci demonstrovat pravidlo součtu, proto postupuji takto:

Označím jako $\mathbf{A_1}$ množinu všech jednociferných čísel, která končí trojkou, jako $\mathbf{A_2}$ označím množinu všech dvouciferných čísel končících trojkou a jako $\mathbf{A_3}$ množinu všech trojciferných čísel menších než 200 končících trojkou.

$A_1 = \{3\}$ ....množina A_1 obsahuje pouze jeden prvek, trojku, proto $\mathbf{p_1=1}$

$A_2 = \{13;23;33;43;53;63;73;83;93\}$ …..množina A_2 obsahuje 9 prvků, proto $\mathbf{p_2=9}$

$A_3 = \{103;113;123;133;143;153;163;173;183;193\}$ …. A_3 obsahuje 10 prvků, $\mathbf{p_3=10}$

Množiny jsou disjunktní, nemohou obsahovat stejné prvky, protože číslo nemůže být současně jednociferné a dvouciferné nebo trojciferné.
Provedeme-li nyní sjednocení těchto tří množin, výsledná množina musí obsahovat $p_1+ p_2+ p_3$ prvků, což je **1 + 9 + 10 = 20** a to je i **řešení úlohy**. To je počet **všech čísel menších než 200 končících trojkou.**

Princip pravidla: rozdělíme celek na disjunktní množiny, jejichž počet prvků můžeme jednoduše zjistit, řešení je pak součet prvků jednotlivých množin.

Kombinatorické pravidlo součinu

Počet uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby a každý další lze po výběru všech předcházejících vybrat postupně $n_2, n_3, \ldots.n_k$ způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots\ldots. \cdot n_k$.

Toto pravidlo si vysvětlíme rovnou na příkladu, to se prostě musí vidět.

Příklad (převzato z : http://carolina.mff.cuni.cz/~jana/kombinatorika/ **,** stránky doporučuji jsou výborné.)

U stánku nabízejí čtyři druhy zmrzliny a tři polevy. Kolik různých zmrzlin s polevou lze vytvořit, jestliže nechceme míchat více druhů ani více polev?

Následující diagram zobrazuje všechny možnosti:

	čokoládová poleva
vanilková	oříšková poleva
	ovocná poleva
	čokoládová poleva
jahodová	oříšková poleva
	ovocná poleva
	čokoládová poleva
meruňková	oříšková poleva
	ovocná poleva
	čokoládová poleva
citrónová	oříšková poleva
	ovocná poleva

Ke každému ze čtyř druhů zmrzliny můžeme přidat jednu ze tří polev, celkem je proto možné vytvořit $4 \cdot 3 =$ **12** různých zmrzlin s polevou.

A ještě jeden příklad:

Příklad:
Kolik trojciferných přirozených čísel lze vytvořit z číslic 0,1,2,3?
Kolik z nich je dělitelné deseti? Kolik z nich je dělitelných dvěma?

Kolik trojciferných přirozených čísel lze vytvořit z číslic 0,1,2,3?

Aby číslo bylo trojciferné, nesmí začínat nulou. Proto výběr čísel vypadá takto:

● ● ●

$3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ (grafické znázornění na následující straně)

Kolik z nich je dělitelné deseti?

Aby číslo bylo dělitelné 10-ti, musí končit nulou. Výběr proto vypadá takto.

● ● ●

$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

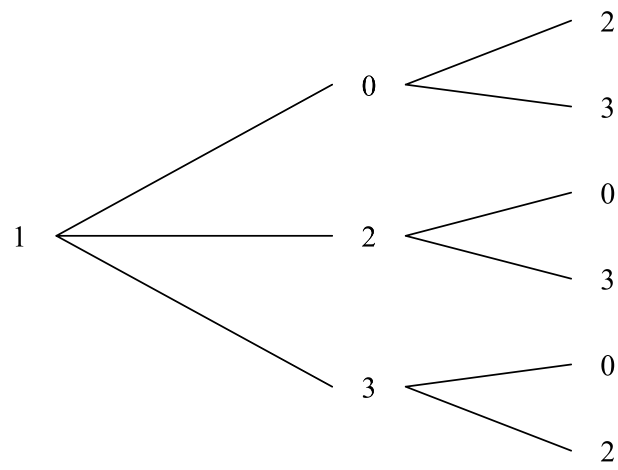
Kolik z nich je dělitelných dvěma?

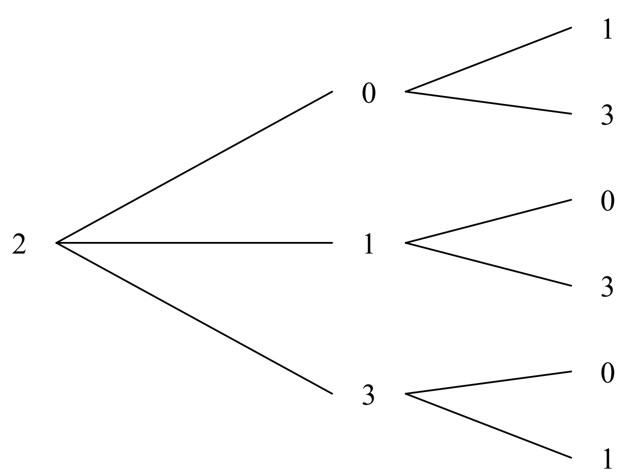
Aby číslo bylo dělitelné dvěma, musí končit nulou nebo dvojkou. Zde použijeme obě pravidla kombinatoriky. Postup je následující:

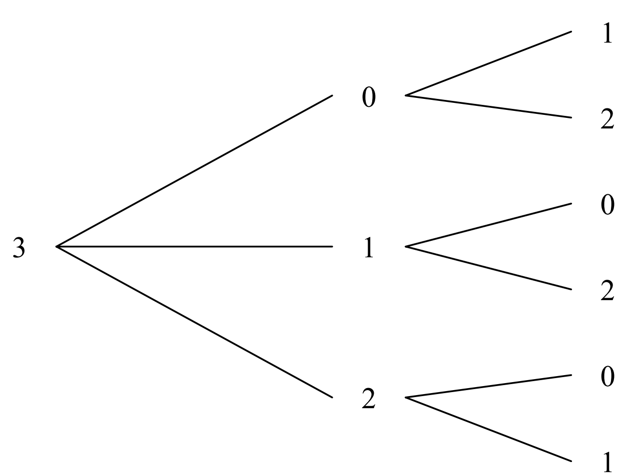
A_1..........množina všech čísel končících nulou ● ● ● $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ **$p_1=6$**

A_2..........množina všech čísel končících dvojkou ● ● ● $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ **$p_2=4$**

Celkový počet čísel dělitelných dvěma je **$6 + 4 = 10$**.


1
0
2
3
2
0
3
3
0
2


2
0
1
3
1
0
3
3
0
1


3
0
1
2
1
0
2
2
0
1

VARIACE $V(k,n)$

(Variace k-té třídy z n prvků
nebo k-členná variace z n prvků)

Definice: Uspořádaná k-tice z n prvků sestavená tak, že každý z nich se v k-tici vyskytuje pouze jednou.

„Uspořádaná" znamená, že záleží na pořadí prvků v k-tici. Např. telefonní číslo je uspořádaná k-tice, není totiž jedno, zda volám 155 nebo 515. Jsou to dvě různé trojice.

Výpočet: pomocí základních pravidel kombinatoriky

nebo

pomocí vzorečku, který ze základních pravidel kombinatoriky vychází

$$V(k,n) = n(n-1)(n-2).......(n-k+1)$$

nebo

pomocí tohoto vzorečku

$$V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

PERMUTACE $P(n)$

(Permutace z n prvků)

Definice: Uspořádaná n-tice z n prvků sestavená tak, že každý z nich se v n-tici vyskytuje pouze jednou.

„Uspořádaná" znamená, že záleží na pořadí prvků v k-tici. Např. telefonní číslo je uspořádaná k-tice, není totiž jedno, zda volám 155 nebo 515.

Výpočet: pomocí základních pravidel kombinatoriky

nebo

pomocí vzorečku, který ze základních pravidel kombinatoriky vychází

$$P(n) = n!$$

Použité symboly: n! čteme n faktoriál

$$n! = 1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet 4....... \bullet n$$

KOMBINACE $K(k,n)$

(Kombinace k-té třídy z n prvků nebo k-členná kombinace z n prvků)

Definice: Neuspořádaná k-tice z n prvků sestavená tak, že každý z nich se v k-tici vyskytuje pouze jednou.

„Neuspořádaná“ znamená, že nezáleží na pořadí prvků v k-tici. Např. je jedno zda ve Sportce budou vylosována čísla 1,2,3,4,5,6 nebo 6,5,4,3,2,1.

Výpočet: pomocí vzorečku

$$K(k,n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

někdy s pomocí základních pravidel kombinatoriky.

$\binom{n}{k}$ je kombinační číslo, čteme n nad k

Ukázky výpočtů:

Kolik přirozených trojciferných čísel lze sestavit z číslic 0 až 9, jestliže se každá číslice vyskytuje v čísle právě jednou?

Řešení:
Jedná se o **variaci**, tvoříme **trojice z deseti** číslic.

Počítat můžeme podle vzorců nebo pomocí pravidel kombinatoriky.

Vzorec:

$$V_{(3,10)} - V_{(2,9)} = \frac{10!}{(10-3)!} - \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{10!}{7!} - \frac{9!}{7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7!} - \frac{7! \cdot 8 \cdot 9}{7!} = 648$$

Nelze vypočítat pomocí jednoho vzorce, je nutno použít rozdílu $V_{(3,10)}$ - $V_{(2,9)}$.

$V_{(3,10)}$ ....počet všech trojic, které lze z číslic 0-9 vytvořit.

●   ●   ●

$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

Do řešení však nelze započítat trojice začínající nulou (nejsou to trojciferná čísla).
Proto je nutno od $V_{(3,10)}$ odečíst $V_{(2,9)}$ .... což je počet všech trojciferných čísel začínajících nulou.

0

●   ●   ●

$1 \cdot 9 \cdot 8 = 72$

$720 - 72 = 648$

Jednodušší je zde výpočet pomocí **pravidel kombinatoriky**, je kratší a asi i pochopitelnější :

●   ●   ●

$9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$

První číslici můžeme volit devíti způsoby.....číslic je k dispozici 10, nulu volit nelze.
Druhou číslici lze volit také devíti způsoby...jedna již je na prvním místě, nula se do výběru vrací.
Třetí číslici můžeme volit osmi způsoby......dvě jsou již vybrané na předchozích místech.

Podle pravidla součinu tyto hodnoty mezi sebou vynásobíme a dostaneme výsledek.

Kolika způsoby lze seřadit 10 knih na polici?

Řešení:
Jedná se o **permutaci**, tvoříme **desetice z deseti** číslic.

Počítat můžeme podle vzorců nebo pomocí pravidel kombinatoriky. Je to v podstatě stejné.

Vzorec:

$P_{(10)} = 10!$ Toto lze považovat za výsledek, zajímá-li Vás kolik to tak asi je, použijte k výpočtu kalkulačku.

Pro zajímavost 10! = 3 628 800

Výpočet pomocí **pravidel kombinatoriky:**

• • • • • • • • • •

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10!$

A jsme zpátky u vzorce.

Kolik možností je u tahu Sportky? Tahá se 6 čísel ze 49.

Řešení:
Jedná se o **kombinaci**, tvoříme **šestice ze čtyřiceti devíti** číslic. Nezáleží na pořadí tažených čísel, proto volíme kombinaci.

Zde doporučuji výpočet pouze podle vzorců.

Vzorec:

$$K(6,49)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\binom{49}{6}=\frac{49!}{6!\cdot 43!}=\frac{43!\cdot 44\cdot 45\cdot 46\cdot 47\cdot 48\cdot 49}{6!\cdot 43!}=$$
$$=\frac{44\cdot 45\cdot 46\cdot 47\cdot 48\cdot 49}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=11\cdot 3\cdot 23\cdot 47\cdot 8\cdot 49=13\ 983\ 816$$

Což je docela dost, takže raději nesázejte.

Pro zvídavé ukázka výpočtu podle pravidel kombinatoriky:
Ukázka výpočtu pomocí pravidel kombinatoriky:

● ● ● ● ● ●

$$49\ \cdot\ 48\ \cdot\ 47\ \cdot\ 46\ \cdot\ 45\ \cdot\ 44=1{,}0068347\cdot 10^{10}$$

Toto číslo je však daleko větší než výsledek, protože každá šestice je v něm obsažena 720x. Proč? Protože kombinatorická pravidla nám vypočítají počet uspořádaných k-tic. Zde máme šestice, proto každá šestice je zde 6! krát.

Po vydělení 720 dostáváme správný výsledek.

$$\frac{1{,}0068347\cdot 10^{10}}{720}=13\ 983\ 816$$

Ještě jednou: proč je tam každá šestice 720x?

Jsou-li tažena čísla 1 2 3 4 5 6, mohou být opravdu tažena 720-ti způsoby. Zde jsou pro ukázku dva z nich:

1 2 3 4 5 6
2 1 3 4 5 6

Jestli stále někdo nevěří, že jich je 720, vypište si je všechny.

Počet možných šestic jsme určili pomocí permutace $P_{(6)}=6!=720$, protože se ptáme: kolika způsoby můžeme tahat šest čísel neboli kolika způsoby můžeme seřadit šest čísel ?